

Prof. Dr. Alfred Toth

Dualität und Gleichheit bei kombinatorischen Zahlen

1. Kaehr (2012, S. 6) hatte folgende vier kombinatorischen Zahlen unterschieden

types \ values	aa	ab	ba	bb	Kombinatorik
<i>Boolean</i>	aa	ab	ba	bb	m^n
<i>Mersennian</i>	aa	ab	ba	–	$2^n - 1$
<i>Brownian</i>	aa	ab	–	bb	$\binom{n+m-1}{n}$
<i>Stirling trito</i>	aa	ab	–	–	$\sum_{k=1}^M S(n, k)$

Daraus folgt

1.1. Bei Boole-Zahlen werden duale und gleiche Symbole unterschieden.

1.2. Bei Mersenne-Zahlen werden nur duale, aber nicht gleiche Symbole unterschieden.

1.3. Bei Brown-Zahlen werden nur gleiche, aber nicht duale Symbole unterschieden.

1.4. Stirling-Zahlen werden weder duale noch gleiche Symbole unterschieden.

Was die von Bense (1975, S. 37) eingeführten, von uns so genannten Peirce-Zahlen betrifft, so gilt

$$(1.1) \neq (2.2) \neq (3.3)$$

$$(1.2) \neq (2.1), (1.3) \neq (3.1), (2.3) \neq (3.2),$$

d.h. die Peirce-Zahlen sind eine Form der Boole-Zahlen.

2. Seien A und B zwei nichtleere endliche Mengen

$$A = (a_1, a_2, \dots, a_n)$$

$$B = (b_1, b_2, \dots, b_n).$$

B^A bezeichne die Menge aller Abbildungen μ von A auf B

$$B^A = (\mu \mid \mu: A \rightarrow B).$$

Dann ist die Kardinalität von B^A

$$\text{card } B^A = (\text{card } B)^{\text{card } A} = m^n$$

Bezeichne $\sim^p$ die Proto-Äquivalenz. Die Proto-Äquivalenz zweier Abbildungen μ_1 und μ_2 von B^A ist gegeben durch

$$\text{DEFINITION 1: } \mu_1 \sim^p \mu_2 \Leftrightarrow \text{card } A/\ker \mu_1 = \text{card } A/\ker \mu_2.$$

Wie man leicht sieht, ist die Proto-Äquivalenz reflexiv, symmetrisch und transitiv. Damit wird B^A in paarweise disjunkte nichtleere Teilmengen partitioniert, deren Anzahl

$$\text{card } B^A / \sim^p = \min(\text{card } A, \text{card } B)$$

ist.

Bezeichne $\sim^d$ die Deutero-Äquivalenz.

$$\text{DEFINITION 2: } \mu_1 \sim^d \mu_2 \Leftrightarrow A/\ker \mu_1 \equiv A/\ker \mu_2.$$

Offensichtlich ist die Deutero-Äquivalenz ebenfalls reflexiv, symmetrisch und transitiv. Ihre Anzahl ist

$$\text{card } B^A / \sim^d = \sum_{k=1}^M P(n, k),$$

darin $M = \min(\text{card } A, \text{card } B)$, $n = \text{card } A$, und $P(n, k) = \text{Anzahl der Partitionen von } n \text{ in } k \text{ ganzzahlige Summanden ohne Berücksichtigung der Ordnung.}$

Bezeichne $\sim^t$ die Trito-Äquivalenz.

$$\text{DEFINITION 3: } \mu_1 \sim^t \mu_2 \Leftrightarrow A/\ker \mu_1 = A/\ker \mu_2,$$

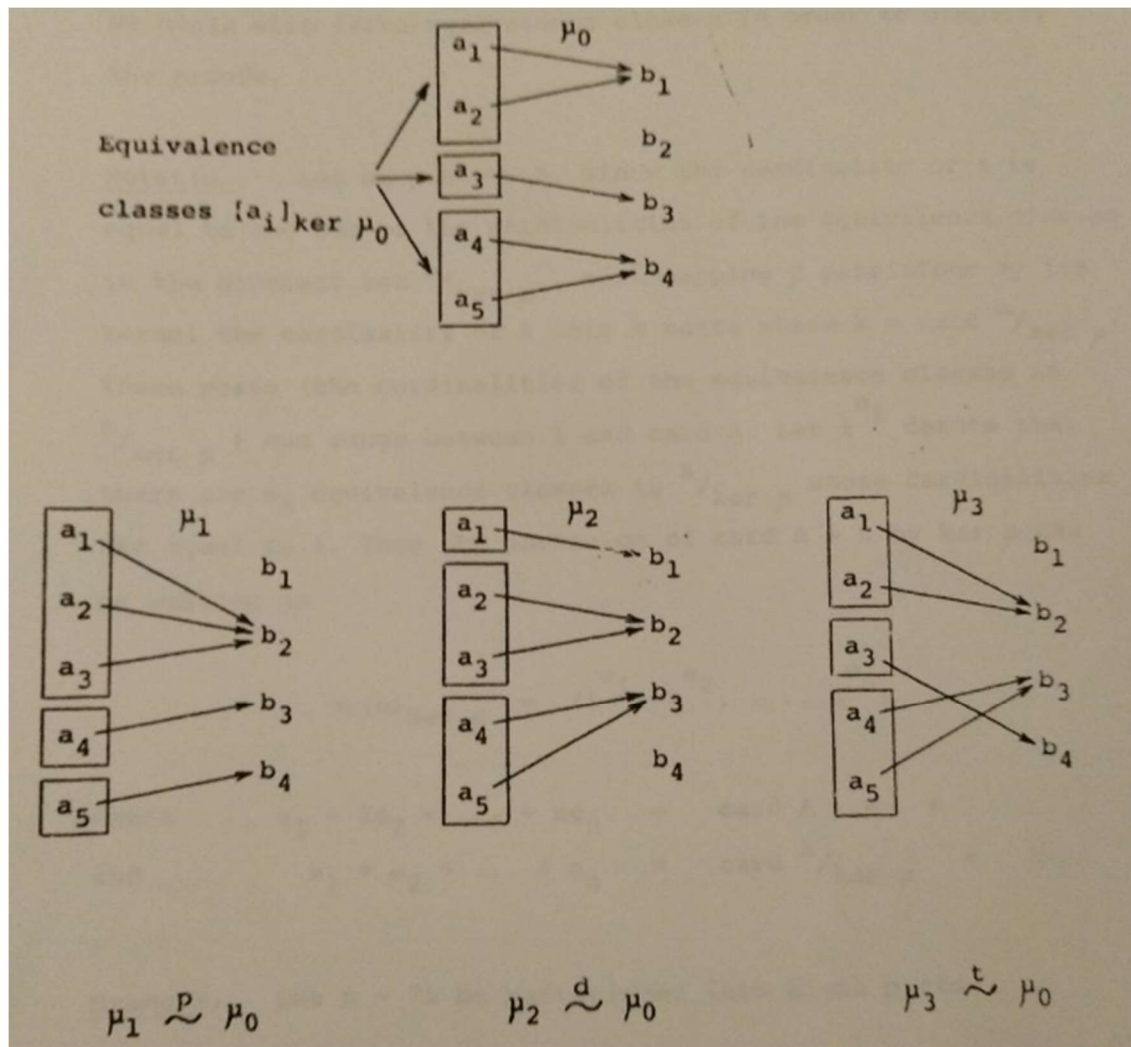
d.h. $(a_i)_{\ker \mu_1} = (a_i)_{\ker \mu_2}$ für alle $a_i \in A$.

Auch die Trito-Äquivalenz ist also reflexiv, symmetrisch und transitiv. Somit wird B^A in disjunkte Teilmengen partitioniert, deren Anzahl gegeben ist durch

$$\text{card } B^A / \sim^t = \sum_{k=1}^M S(n, k),$$

darin $M = \min(\text{card } A, \text{card } B)$, $n = \text{card } A$, und $S(n, k) = \text{Anzahl der Möglichkeiten, eine Menge von } n \text{ Elementen in } k \text{ nichtleere Teilmengen zu partitionieren. } S(n, k) \text{ sind also die Stirling-Zahlen 2. Art.}$

Informell ausgedrückt, werden also bei Proto-Zahlen nur die verschiedenen Symbole, bei Deutero-Zahlen nur die verschiedenen und die gleichen Symbole und bei Trito-Zahlen die verschiedenen und die gleichen Symbole sowie deren Orte berücksichtigt. Vgl. dazu die folgende Tafel aus Schadach (1967, S. 10).



3. Wir können daher die in diesem Aufsatz untersuchten kombinatorischen Zahlen (vgl. Toth 2018) durch das folgende Schema der Relevanz (+) und der Irrelevanz (—) von dualen und gleichen Zahlen charakterisieren

	Dualität	Gleichheit	Ort
Boole-Zahlen	+	+	—
Mersenne-Zahlen	+	—	—
Brown-Zahlen	—	+	—
Proto-Zahlen	—	—	—
Deutero-Zahlen	—	—	—
Trito-Zahlen	—	—	+

Die vollständige Negation in Bezug auf die drei qualitativen zahlentheoretischen Eigenschaften der Dualität, Gleichheit und des Ortes der Boole-Zahlen sind also nur die Proto- und die Deutero-Zahlen. Mersenne- und Brown-Zahlen verhalten sich selbst dual zueinander. Proto-, Deutero- und Trito-Zahlen als Subspezifikationen der Stirling-Zahlen unterscheiden sich durch die Gleichheit und die Verschiedenheit von mehrdeutigen Zahlen, also durch eine Eigenschaft, die von den übrigen kombinatorischen Zahlen nicht geteilt wird. Ortsrelevant sind nur die Trito-Zahlen. Die drei letzteren Zahlen, welche deswegen auch als polykontexturale Zahlen von den drei ersteren Zahlen unterschieden werden, die monokontexturale Zahlen sind, unterliegen also alle dem bereits von Kronthaler (1986, S. 26 f.) eingeführten Normalformoperator – oder anders ausgedrückt: Der Normalformoperator N gilt nicht nur für Stirling-Trito-Zahlen, sondern ebenfalls für Stirling-Proto- und Stirling-Deutero-Zahlen, vgl. etwa

Proto-Zahlen

$$N(0021) = (0012)$$

Deutero-Zahlen

$$N(0022) = (0011)$$

Trito-Zahlen

$$N(3210) = (0123).$$

Literatur

Bense, Max, Semiotische Prozesse und Systeme. Baden-Baden 1975

Kronthaler, Engelbert, Grundlegung einer Mathematik der Qualitäten. Frankfurt am Main 1986

Rudolf Kaehr: "Zu einer Komplementarität in der Graphematik",
www.vordenker.de http://www.vordenker.de/rk/rk_Komplementaritaet-in-der-Graphematik_2012.pdf

Schadach, Dieter, A classification of mappings. BCL Report No. 2/2, February 1, 1967

Toth, Alfred, Kombinatorische Zahlen. In: Electronic Journal for Mathematical Semiotics, 2018

27.4.2019